Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter.

Af

H. G. Zeuthen.

1. Fremstilling ved Projektion. Naar man fra et vilkaarligt Punkt af Rummet projicerer en Rumkurve r_4 af fjerde Orden, første Art, ɔ: Skjæringskurven mellem to Flader af anden Orden, bliver Projektionen paa en Plan en Kurve af fjerde Orden, k_4. Gjennem Skjæringskurven gaa nu ikke blot de to givne Flader, men hele det ved disse bestemte Fladebundt. I dette er der ogsaa en Flade, som gaar gjennem Projektionscentret P, og i denne er der — da enhver Flade af anden Orden kan frembringes ved to Rækker (reelle eller imaginære) retliniede Frembringere — en Frembringer af hver Række, som gaar igjennem P. Hver af disse skjærer enhver anden Flade i Bundtet, altsaa ogsaa Rumkurven, i to Punkter og bliver altsaa en Dobbeltsekant; dens Spor bliver da et Dobbeltpunkt paa Projektionen k_4. Denne faar saaledes to Dobbeltpunkter.

Omvendt kan enhver plan Kurve af fjerde Orden med 2 Dobbeltpunkter k_4 opfattes som Projektion af en Rumkurve af fjerde Orden, første Art, r_4. Vi skulle se, at vi endog, foruden Projektionscentret P, som kan vælges helt vilkaarligt, kunne vælge 4 Punkter af r_4 vilkaarligt paa Keglefladen Pk_4, der projicerer k_4.

Bevis. Man lægger en Flade af anden Orden φ_2 gjennem de Linier, som projicere Dobbeltpunkterne, og de 4 valgte

Punkter af Keglefladen Pk_4. Denne skjærer Pk_4 to Gange langs hver af denne Kegleflades to Dobbeltfrembringere og altsaa tillige i en Rumkurve af fjerde Orden. Gjennem 8 Punkter af denne lægges en fra ψ_2 forskjellig Flade af anden Orden φ_2. Projektionen af Skjæringslinien $(\varphi\psi)$ mellem φ_2 og ψ_2 vil da have de samme to Dobbeltpunkter som k_4 og endnu gaa gjennem 8 af k_4's Punkter. Disse, der kunde være 8 vilkaarlige Punkter af k_4, kunne altsaa være valgte saaledes, at de i Forbindelse med de to givne Dobbeltpunkter fuldkommen bestemme en Kurve af fjerde Orden. Projektionen af $(\varphi\psi)$ maa saaledes falde sammen med k_4.

Da vi paa denne Maade ere satte i Stand til at anvende Sætninger om et Fladebundt af anden Orden ved den Undersøgelse, som her skal beskjæftige os, vil Overblikket over denne vistnok lettes ved, at vi forud minde om nogle af de vigtigste af disse Sætninger.

Fladebundtet skjærer en vilkaarlig ret Linie i en Række Punktpar i involution. — To Punkter, der ere konjugerede med Hensyn til to Flader i Bundtet, ere det altsaa med Hensyn til dem alle. Heraf følger, at et Punkts Polarplaner med Hensyn til Fladerne danne et Planbundt; dettes Axe kunne vi kalde Punktets Polaraxe med Hensyn til Fladebundtet. — Lader man i Polarplanbundterne til to Punkter P og Q Polarplanerne med Hensyn til samme Flade svare til hinanden, blive Bundterne projektive; de frembringe da en Flade af anden Orden, hvis Frembringere af den her angivne Frembringelse blive Polarlinierne til en fast Linie l (Linien PQ) med Hensyn til de enkelte Flader i Bundtet, medens Frembringerne af anden Frembriugelse blive Polaraxerne til den samme Linie l's Punkter med Hensyn til Fladebundtet. Denne Flade ville vi kalde l's Polarflade med Hensyn til Fladebundtet. — Polarplanbundterne til tre Punkter P, Q, R frembringe en Rumkurve af tredie Orden, som i Forbindelse med Q's Polaraxe danner den fuldstændige Skjæringskurve mellem PQ's og QR's Polarflader;

den bliver geometrisk Sted for Polerne til Planen π gjennem P, Q og R, eller for de Punkter, hvis Polaraxer ligge i π, og dens Dobbeltsekanter ere Polaraxer til Planens Punkter; denne Kurve ville vi kalde Planen π's Polarkurve med Hensyn til Fladebundtet. — To Planer π og $\varkappa$'s Polarkurver, der begge ligge paa Skjæringslinien $\pi\varkappa$'s Polarflade, skjære hinanden i 4 Punkter. Disse 4 Punkters Polaraxer skulde — uden at falde sammen med Skjæringslinien, der i Almindelighed slet ikke er nogen Polaraxe — ligge baade i π og i $\varkappa$, hvilket kun kan forklares derved, at Punkterne faa samme Polarplaner med Hensyn til alle Flader i Bundtet, hvorved deres Polaraxer blive ubestemte. Polarplanerne til hvert af disse Punkter gaa gjennem de 3 andre. De Flader i Bundtet, som gaa gjennem disse Punkter, ere Keglefiader. Gjennem de samme Punkter gaa alle Polarflader og Polarkurver til Rummets rette Linier og Punkter.

En ret Linie p, som er Polaraxe til et Punkt P, er Frembringer (af den Frembringelse, som ovenfor kaldtes «anden») i Polarfladen til enhver ret Linie gjennem P og Dobbeltsekant til Polarkurven til enhver Plan gjennem P. Gaar P's Polaraxe gjennem et Punkt Q, ere P og Q konjugerede med Hensyn til alle Flader i Bundtet, og Q's Polaraxe maa da ogsaa gaa gjennem P. Heraf slutter man, at Polarfladen til Polaraxen til et Punkt P er en Keglefiade med P til Toppunkt, og at, naar omvendt en Polarflade er en Keglefiade med Toppunkt P, svarer den til Punktet P's Polaraxe. [Idet saaledes de Polaraxer, som gaa gjennem et givet Punkt, danne en Keglefiade af anden Orden, danne alle Polaraxer et saakaldt Liniekomplex af anden Orden. De Polaraxer, som ligge i en Plan, indhylles af et Keglesnit.]

Naar man forbinder et bevægeligt Punkt P af en ret Linie l med P's Polaraxe p ved en Plan, vil denne skjære l og l's Polarlinier med Hensyn til to vilkaarlige Flader i Bundtet i projektive Punktrækker og altsaa indhylles af en udfoldelig Flade af tredie Klasse. Er l selv en Polaraxe, dens Polarflade altsaa en Kegleflade, ville to af de projektive Punktrækker vel blive af en saadan særegen Beskaffenhed, at Beviset bliver ubrugeligt, men Sætningen maa vedblive at finde Sted i dette Grænsetilfælde. Kun bliver da ogsaa den udfoldelige Flade en Kegleflade med samme Toppunkt som l's Polarflade og med Planen gjennem l til dobbelt Tangentplan, idet l's Polarflade skjærer l i to Punkter.

Den Flade i Bundtet, som gaar gjennem Punktet P, berører den Plan, der forbinder P med sin Polaraxe. Den nys fundne udfoldelige Flade er saaledes ogsaa Indhyllingsflade for Tangentplanerne i Punkter af l. Linien l's Polarflade gaar gjennem Røringspunkterne for alle Tangentplaner fra l; (det geometriske Sted for disse Røringspunkter er en paa denne Polarflade beliggende Kurve af femte Orden, som der dog ikke skal gjøres Brug af her). En Plans Polarkurve skjærer Planen i de 3 Røringspunkter med Flader i Bundtet.

Analytiske Beviser for de her opstillede Sætninger, hvis geometriske Begrundelse i det mindste er antydet ved Sammenstillingen, ere dels bekjendte, dels lette at danne.

2. Særeget System af firdobbelt rørende Keglesnit. Idet vi som i Nr. 1 ved φ_2 betegne en vilkaarlig Flade af anden Orden gjennem r_4, ses det, at den tilsyneladende Kontur f_2 af φ_2, projiceret fra et Punkt P, vil være et firdobbelt rørende Keglesnit til r_4. Konturen f_2 vil nemlig berøre Projektionen af enhver Kurve paa φ_2 i alle de Punkter (imaginære som reelle), som de have fælles. Den virkelige Konturs Plan, som er P's Polarplan med Hensyn til φ_2, vil fremdeles skjære den Flade ψ_2 i Bundtet, som gaar gjennem P i et Keglesnit, hvis Projektion g_2 gaar gjennem de 4 Røringspunkter mellem k_4 og f_2 samt gjennem de to Dobbeltpunkter paa r_4.

Sætter man efterhaanden i Stedet for φ_2 alle Flader i Bundtet, danne P's Polarplaner med Hensyn til disse (som anført i Nr. 1) selv et Bundt, hvis Axe maa ligge i ψ_2's Tangentplan i P, som selv er en Polarplan. Denne Axe skjærer ψ_2 i to faste Punkter af Frembringerne i P, og Sporene af Tangentplanerne i disse ville stedse berøre Keglesnittet g_2 i r_4's Dobbeltpunkter. Altsaa:

Til en plan Kurve af fjerde Orden k_4 med to Dobbeltpunkter hører et enkelt uendeligt System firdobbelt rørende Keglesnit f_2, hvis Røringspunkter ligge paa Keglesnit g_2, som gaa gjennem Dobbeltpunkterne og i disse have faste Tangenter.

Det er dette «særegne» System af firdobbelt rørende Keglesnit — foruden hvilket Kurven har andre, som bestemmes paa anden Maade — som her skal beskjæftige os, idet vi skulle benytte den stereometriske Fremstilling til Udledelse af saadanne Egenskaber ved Kurven, som staa i Forbindelse med dette System. Foruden nye Egenskaber skulle vi for Sammenhængens Skyld ogsaa medtage saadanne, som ere indbefattede i mere eller mindre bekjendte Sætninger om firdobbelt rørende Keglesnit til en almindelig Kurve af fjerde Orden.

3. Forbindelse mellem Keglesnit i det særegne System. Vi skulle gjøre ny Anvendelse af, at P's Polarplaner α med Hensyn til Fladerne φ danne et Bundt. α, α', α'' .... være Polarplanerne med Hensyn til φ_2, φ_2', φ_2''..., og f_2, f_2', f_2''... være disse Fladers tilsyneladende Konturer. Planen α skjærer φ_2' i et Keglesnit, hvis Projektion l_2' dels maa gaa igjennem f_2's 4 Røringspunkter med k_4, dels maa berøre f_2' i dennes 2 Skjæringspunkter med Linien d gjennem k_4's Dobbeltpunkter, eftersom denne Linie er Projektion af Polarplanbundtets Axe. Keglefladen Pl_2', som saaledes skjærer φ_2' i ét Keglesnit, vil skjære den i endnu et, hvis Plan α'' gaar gjennem Skjæringslinien $\alpha\alpha''$ og altsaa ogsaa hører til Bundtet af Polarplaner, og som er harmonisk forbundet med α med Hensyn til α' og til den Plan Pd i dette Bundt, som gaar gjennem P. Planen α''

er Polarplan til P med Hensyn til en ny Flade φ_2'' i Bundtet, og l_2' gaar altsaa gjennem f_2'''s 4 Røringspunkter med k_4.

φ_2 og φ_2'' kunne her være to hvilke som helst Flader i Bundtet, f_2 og f_2'' altsaa to hvilke som helst Keglesnit i det særegne System, idet α' da blot bestemmes som den Plan i Polarplanbundtet, som er harmonisk forbundet med Planen Pd med Hensyn til α og α''. Altsaa

Gjennem de 8 Punkter, hvori to Keglesnit f_2 og f_2'' i det særegne System berøre Kurven k_4, kan man lægge et Keglesnit l_2', der vil berøre et tredie Keglesnit f_2' i Systemet i dets Skjæringspunkter med Forbindelseslinien d mellem Dobbeltpunkterne.

Keglesnittene l_2, der ere Projektionerne af Skjæringslinierne mellem alle Planer i Bundtet α og alle Flader φ_2, danne et saakaldt lineært Net, hvortil det særegne System hører.

Hertil skulle vi føje den Bemærkning, at Linien d skjærer Keglesnittene i det særegne System — og altsaa ogsaa Keglesnittene l_2 — i en Række Punktpar i Involution; Kurvens Dobbeltpunkter danne et Punktpar heri. Disse Punktpar ere nemlig Projektioner af dem, hvori P's Polaraxe skjærer Fladerne i Bundtet.

4. Bestemmelse af Keglesnit i det særegne System ved opgivne Betingelser; særegne Keglesnit. Et Keglesnit f_2 i det særegne System, som gaar gjennem et Punkt A af Projektionsplanen, er tilsyneladende Kontur af en Flade φ_2 i Bundtet, som berører Forbindelseslinien PA mellem Projektionscentret og Punktet A. Af saadanne er der 2, idet Røringspunkterne ere Dobbeltpunkterne i den Involution, som dannes af PA's Skjæringspunkter med Bundtets Flader. Antallet μ af de Keglesnit i Systemet, som gaa gjennem et givet Punkt, er altsaa 2. Ligger Punktet paa selve Kurven k_4, ville disse to Keglesnit dog falde sammen.

Skal Keglesnittet f_2 berøre en ret Linie a, maa den tilsvarende Flade φ_2 berøre Planen Pa, som altsaa skjærer den i to Frembringere. Nu skjærer Planen Pa Fladebundtet i et Keglesnitsbundt, som indeholder 3 Keglesnit sammensatte af rette Linier, nemlig de modstaaende Sidepar i den fuldstændige Firkant, som dannes af Planens 4 Skjæringspunkter med Rumkurven r_4. Idet disses Projektioner ere a's Skjæringspunkter med k_4, se vi, at Antallet ν af Keglesnit i det særegne System, som berøre en ret Linie a, er 3, og at disse ere knyttede hvert til sin af de Maader, hvorpaa a's 4 Skjæringspunkter kunne dele sig i to Par. Er saaledes A Keglesnittet f_2's Berøringspunkt med Linien a, vil A være Projektion af Skjæringspunktet mellem to Frembringere i Fladen φ_2, som begge projiceres i a, og af a's Skjæringspunkter med k_4 ville de to, M_1 og M_2, være Projektioner af den ene Frembringers Skjæringspunkter med Rumkurven, de to, M_3 og M_4, af den andens Skjæringspunkter.

Af de bekjendte Egenskaber ved et plant Keglesnitsbundt udledes nu Egenskaber ved de 3 Keglesnit f_2, f_2', f_2'', som berøre a, og ved deres Røringspunkter A, A', A''. Man finder saaledes, at disse Keglesnit alle tre ere reelle, naar a enten skjærer k_4 i 4 reelle Punkter eller i intet, men at de to ere imaginære, naar a skjærer k_4 i blot to reelle Punkter. Vi skulle imidlertid i dette Arbejde ikke gaa ind paa saadanne Realitetsspørgsmaal[1]), og skulle derfor nu kun betragte Grænseformer for det Keglesnitsbundt, hvori Pa skjærer Fladebundtet:

1) a er Tangent til k_4. Keglesnittene i Bundtet ville da røre hinanden, og to af de sammensatte Keglesnit ville falde

---

[1]) Hovedsætningerne om Realitet af Grene af k_4, af dens Dobbeltpunkter, Dobbelttangenter o. s. v. fremgaa forøvrigt let af den Diskussion af Realitetsforhold ved et Fladebundt af anden Orden, hvis Resultater jeg har anført i Nr. 22 af min Afhandling om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. (Festskrift i Anledning af Universitetets Firehundredeaarsfest, Kjøbenhavn 1879.)

sammen til ét, hvis sammensættende rette Linier skjære hinanden i Røringspunktet. Af de 3 Keglesnit i det særegne System, som røre a, ville altsaa to falde sammen til et, som rører k_4 i samme Punkt som a.

2) a er Vendetangent til k_4. De tre Keglesnit f_2, f_2', f_2'' falde da alle sammen til ét, som rører k_4 i samme Punkt som a.

3) a er Dobbelttangent til k_4. I Bundtet i Planen Pa ville da to sammensatte Keglesnit falde sammen til ét, som bestaar af to sammenfaldende rette Linier. Den Flade φ_2, som indeholder disse, maa være en Kegleflade, hvis ene Konturlinie er a, medens den anden er en dermed forbunden anden Dobbelttangent til k_4. Da de Plückerske Formler lære, at k_4 har 8 Dobbelttangenter, faa vi altsaa dels et nyt Bevis for (se Nr. 1), at et Bundt Flader af anden Orden indeholder 4 Keglefladér, dels se vi, at Kurven k_4's Dobbelttangenter fordele sig til 4 Par, som danne Keglesnit i det særegne System; de fire Skjæringspunkter H, H', H'', H''' ville vi kalde Hovedpunkterne. Endelig se vi, at en Dobbelttangent endnu berører ét Keglesnit i det særegne System.

4) a gaar gjennem et Dobbeltpunkt D. Den ene af de 3 Flader φ_2, som berører Planen Pa, vil da være den, ψ_2, som gaar gjennem P, og hvis Kontur er Sporet d af Tangentplanen i P til ψ_2, taget to Gange. Foruden dette særegne Keglesnit ville to Keglesnit f_2 berøre a. Dette samme vil finde Sted, naar

5) a er selve Linien d gjennem begge Dobbeltpunkterne; i dette Tilfælde ville de to Røringspunkter være harmonisk forbundne med Hensyn til Dobbeltpunkterne (ses ogsaa af Slutningen af Nr. 3).

Af de to sidste særegne Tilfælde ses, at et af Systemets Keglesnit er en Dobbeltlinie, som falder sammen med d, og at Linier gjennem Dobbeltpunkterne ere dettes Tangenter, Dobbeltpunkterne altsaa dets Toppunkter.

Anm. Systemet indeholder saaledes 1 Dobbeltlinie og 4 Keglesnit sammensatte af rette Linier. Da dets i Begyndelsen af nærværende Nr. fundne saakaldte «Karakteristiker» μ og ν have Værdierne 2 og 3, stemme de fundne Antal af særegne Keglesnit med Karakteristiktheoriens Formler, som give

$$2\mu - \nu = 1,\quad 2\nu - \mu = 4.$$

5. Et Punkts Polarkeglesnit med Hensyn til det særegne System. Vi betragte et Punkt A af Kurven k_4's Plan. Vi vide da (Nr. 1), at det geometriske Sted for Linien PA's Polarlinie med Hensyn til Fladerne φ_2 — og tillige for dens Punkters Polaraxer med Hensyn til dette Fladebundt — er en Flade af anden Orden ω_2. Tangenterne til denne Flades Kontur o_2 blive da Projektioner af disse Polarlinier og maa saaledes være A's Polarer med Hensyn til Konturerne f_2 af Fladerne φ_2. Altsaa:

Polarerne til et fast Punkt A med Hensyn til Keglesnittene i det særegne System indhylles af et Keglesnit o_2. Dette ville vi kalde A's Polarkeglesnit med Hensyn til det særegne System, eller kort (hvor det ikke kan forvexles med A's anden Polar eller Polarkeglesnit med Hensyn til Kurven k_4) A's Polarkeglesnit.

Af dette Keglesnits her anførte Egenskab fremgaar, at det berører Tangenterne i A til de to Keglesnit f_2, som gaa igjennem A, samt Forbindelseslinien d mellem Dobbeltpunkterne.

De stereometriske Hjælpesætninger i Nr. 1 sætte os ogsaa i Stand til at bestemme de Punkter, hvis Polarkeglesnit o_2 antage særegne Former. Fladen ω_2 vil gaa gjennem Projektionscentret P, naar Linien PA er beliggende i Tangentplanen Pd til den Flade ψ_2 i Bundtet, som gaar igjennem P, Punktet A — som vi i dette Tilfælde ville kalde A', medens vi kalde dets Polarkeglesnit o_2' og PA's Polarflade ω_2' — altsaa paa Linien d gjennem Dobbeltpunkterne. PA''s Polarlinie med Hensyn til ψ_2 er da den konjugerede Tangent PB, som træffer d i det Punkt B, som er harmonisk forbundet med A' med Hensyn til Dobbeltpunkterne D og D'. Fladen ω_2''s Frembringer PC af anden Frembringelse gjennem P, der skal være Polaraxe til PA''s Skjæringspunkt med P's Polaraxe, ligger paa denne Polaraxes Polarflade, der ifølge Nr. 1 er en Kegleflade Pc_2. Denne gaar, som alle Polarflader, gjennem Toppunkterne i de 4 Keglefladør i Bundtet φ_2, og den maa tillige gaa gjennem Røringspunkterne for de to Flader i Bundtet φ_2, som foruden ψ_2 berøre Planen Pd. Sporet C af Frembringeren PC i ω_2' vil da ligge paa det Keglesnit c_2, der gaar gjennem de 4 Hovedpunkter H samt Dobbeltpunkterne af den Involution, som dannes af Skjæringspunkterne mellem d og Keglesnittene f_2; dette Keglesnit c_2 ville vi kalde det Jacobiske Keglesnit[1]). Punktet A''s Polarkeglesnit o_2' bliver nu det uendelig fladtrykte Keglesnit med Toppunkterne B og C, og da PC var Polaraxe til et Punkt af PA' og altsaa skal skjære alle Polarlinierne paa Fladen ω_2', ville disses Projektioner, altsaa A''s Polarer med Hensyn til Keglesnittene f_2 gaa gjennem C. Da Planen PBC er Polarplan med Hensyn til Fladen ψ_2 til Skjæringspunktet mellem PA' og P's Polaraxe, vil den gaa gjennem denne Polaraxes Polarlinie med Hensyn til Fladen ψ_2. Denne maa være Frembringer i Keglefladen Pc_2, og altsaa gaar Linien BC for alle Beliggenheder af A' paa d gjennem et fast Punkt O af Keglesnittet c_2.

Tages nu omvendt et Punkt C af Hovedkeglesnittet til Pol, vil, da PC er Polaraxe til et Punkt af PA', PC's Polarflade være en Kegleflade med Toppunktet paa PA' (se Nr. 1). C's Polarkeglesnit er da sammensat af to rette Linier gjennem A', nemlig denne Keglefllades Konturlinier. Hver Linie gjennem A er Projektion af to Frembringere i denne Kegleflade og er altsaa C's Polar med Hensyn til to Keglesnit f_2.

De her beviste Sætninger ere:

Polarerne til et Punkt A' af Linien d gjennem

[1]) Det danner nemlig i Forbindelse med Linien d den Jacobiske Kurve til det Keglesnitsnet, hvortil det særegne System hører (se Nr. 3).

Dobbeltpunkterne danne et sædvanligt Liniebundt med Toppunkt i det Punkt C, hvor det Jacobi'ske Keglesnit anden Gang skjæres af den Linie, som forbinder et fast Punkt O af dette Keglesnit med det Punkt B, som er harmonisk forbundet med A' med Hensyn til Dobbeltpunkterne D og D'. Polarerne til Punktet C ville danne et dobbelt Liniebundt med Toppunkt i A'.

Det ses, at A' og C ville være konjugerede med Hensyn til alle Keglesnit i det lineære Net, hvortil det særegne System hører (Nr. 3), og at O vil være Linien d's Pol med Hensyn til de Keglesnit i dette Net, som gaa gjennem D og D' (Projektioner af Snit i φ_2; Nr. 2).

6. En ret Linies Polkurve med Hensyn til det særegne System. Er a en ret Linie i Projektionsplanen, er ifølge Nr. 1 det geometriske Sted for Polerne til Planen Pa med Hensyn til Fladerne φ_2 en Rumkurve af 3die Orden. Dennes Projektion maa være det geometriske Sted for Polerne til Linien a med Hensyn til Keglesnittene f_2 i det særegne System. Dette geometriske Sted bliver saaledes en Kurve af 3die Orden med Dobbeltpunkt i Sporet af den Dobbeltsekant til Rumkurven, som gaar gjennem P. Da nu Rumkurvens Dobbeltsekanter ere Polaraxer til Punkterne i Planen Pa, ses det som i Nr. 5, at den Dobbeltsekant, som gaar gjennem P, maa træffe det Jacobi'ske Keglesnit c_2 i det Punkt C, som svarer til Skjæringspunktet A' mellem a og Linien d gjennem Dobbeltpunkterne. Altsaa:

Det geometriske Sted for Polerne til en ret Linie med Hensyn til Keglesnittene i det særegne System er en Kurve af tredie Orden med et Dobbeltpunkt paa det Jacobi'ske Keglesnit, og som desuden (ifølge sin Hovedegenskab) skjærer dette i de 4 Hovedpunkter. Denne Kurve ville vi kalde den rette Linies Polkurve med Hensyn til det særegne System.

Polkurven maa endvidere, ifølge dens her anførte Hovedegenskab, skjære den rette Linie a, hvortil den hører, i dennes 3 Røringspunkter med Keglesnit i det særegne System.

Da ifølge vor Udvikling Polkurven til en ret Linie a gjennem et Punkt A er Projektion af en Kurve paa en Flade ω_2, hvis Kontur o_2 er A's Polarkeglesnit, ses det, at naar Punktet A ligger paa Linien a, vil A's Polarkeglesnit og a's Polkurve berøre hinanden i 3 Punkter. a's Polkurve vil i Forbindelse med Linien d gjennem Dobbeltpunkterne være Indhyllingskurve for dens Punkters Polarkeglesnit, og et Punkt A's Polarkeglesnit vil i Forbindelse med de 4 Hovedpunkter udgjøre Indhyllingskurven for Polkurverne til Linier gjennem A.

Polkurven til Linien d gjennem Dobbeltpunkterne er, naar man bortser fra, at ethvert Punkt af Planen kan opfattes som d's Pol med Hensyn til den med d sammenfaldende Dobbeltlinie, det Jacobi'ske Keglesnit c_2; thi Planen Pd's Polarkurve maa ligge paa den Kegleflade Pc_2, som projicerer c_2, idet denne Kegleflade er Polarflade til P's Polaraxe, som ligger i Planen Pd. Idet nu ethvert Keglesnit l_2 i det lineære Net, hvortil det særegne System hører, berører en Kurve f_2 i det særegne System i Punkter af d, bliver c_2 det geometriske Sted for d's Poler med Hensyn til alle Keglesnit i det lineære Net, altsaa tillige det geometriske Sted for Skjæringspunkter mellem saadanne to rette Linier, som danne et Keglesnit i dette Net. (Herom nærmere i Nr. 7.)

7. Den Hermite'ske Indhyllingskurve. Naar vi tillægge P, A', C og c_2 samme Betydninger som i Nr. 5 og 6, ses det, at enhver Plan $PA'C$ maa berøre en Flade φ_2 i det i A' projicerede Punkt af P's Polaraxe; den gaar nemlig gjennem dette Punkts Polaraxe (Nr. 1). Den maa saaledes indeholde to Frembringere i Fladen φ_2, som ligge hver i sin Plan i Bundtet af Polarplaner til P, og som hver skjærer Rumkurven i 2 Punkter. Disse 2 Par Skjæringspunkters Projektioner blive Røringspunkter

mellem k_4 og to Keglesnit f_2 (Nr. 2), og da A' og C ere konjugerede med Hensyn til disse Keglesnit, ere de ogsaa harmonisk forbundne med Hensyn til de to Par Røringspunkter.

Linien PC var Polaraxen til Skjæringspunktet mellem PA' og P's Polaraxe. Planen $PA'C$'s anden Skjæringslinie PG med Keglefladen Pc_2 er Polarlinie til P's Polaraxe med Hensyn til den Flade φ_2, som berører $PA'C$, og den vil altsaa gaa gjennem Røringspunkterne for Tangentplanerne fra P's Polaraxe til φ_2. Projektionerne af disse Tangentplaners Skjæringslinier falde sammen (se Nr. 3) i to Linier $A'C$, som skjære hinanden i deres fra C forskjellige Skjæringspunkt G med c_2 og danne et Keglesnit i det lineære Net.

Indhyllingsfladen for Planerne $PA'C$ er ifølge Nr. 1 en Kegleflade af 3die Klasse med Planen Pd til dobbelt Tangentplan. Berøringsfrembringerne ere Planen Pd's Skjæringslinier med Keglefladen Pc_2. Altsaa:

Til en Kurve af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter k_4 hører en Kurve af tredie Klasse, som berører Linien d gjennem Dobbeltpunkterne i dens Skjæringspunkter med det Jacobi'ske Keglesnit c_2, og hvis Tangenter have følgende Egenskaber: de gaa gjennem to Par Røringspunkter mellem k_4 og Keglesnit i det særegne System; disse Punktpar, saa vel som alle Par Skjæringspunkter med Keglesnit i det særegne System og det derved bestemte lineære Net, ere i Involution med Dobbeltpunkter i Skjæringspunktet A' med Linien d og i det ene Skjæringspunkt C med det Jacobi'ske Keglesnit c_2; gjennem Linien $A'C$'s andet Skjæringspunkt G vil der — foruden den Linie, hvis Punkt C ligger i G — gaa en anden Tangent til Indhyllingskurven, som i Forening med $A'C$ danner et Keglesnit i det lineære Net, og som altsaa gaar gjennem k_4's to andre Par Røringspunkter med de Keglesnit i det særegne System, som havde hvert et Par Røringspunkter paa $A'C$.

Ifølge en af de her anførte Egenskaber vil den fundne Indhyllingskurve — som er den Hermite'ske Kurve til det lineære Net — berøre de 4 Par Dobbelttangenter til k_4.

Skjæringspunkterne mellem en Linie $A'C$ og Kurven k_4 lade sig bestemme ved Lineal og Passer. De danne for det første to Punktpar i en Involution med A' og C til Dobbeltpunkter, og søger man Polarkeglesnittet til et Punkt T af Linien med Hensyn til det særegne System, vil dette skjære $A'C$ i to saadanne Punkter R og R', at T og R ere harmonisk forbundne med Hensyn til det ene, T og R' med Hensyn til det andet Par Skjæringspunkter. R og R' ville nemlig være Polarkeglesnittets Røringspunkter med T's Polarer med Hensyn til de to Keglesnit f_2, som have hvert to Røringspunkter paa $A'C$. De to Par Skjæringspunkter kunne altsaa bestemmes som Dobbeltpunkter i Involutioner bestemte ved to dertil hørende Punktpar, nemlig $A'C$ og henholdsvis TR eller TR'.

Vi skulle dog ikke dvæle ved den nærmere Paavisning heraf, eller Anvendelse til Konstruktion af Kurverne, naar 5 Keglesnit i det særegne System, der maa være Keglesnit af et lineært Net, der indeholder en Dobbeltlinie, ere givne; hvad herom kunde være at sige, vilde nemlig være indbefattet i lige saa simple Betragtninger om almindelige Kurver af fjerde Orden (om end Konstruktionerne da vilde blive mindre simple).

8. Bestemmelse af Tangenter fra et fast Punkt til k_4. Tangenter fra et Punkt A til Kurven k_4 ere Spor af Tangentplaner fra PA til Rumkurven r_4. En saadan Tangentplan vil i sit Røringspunkt R med r_4 berøre en af Fladerne i Bundtet φ_2, og dette Røringspunkt er altsaa beliggende paa PA's Polarlinie med Hensyn til denne Flade φ_2. Det maa saaledes være et Punkt af PA's Polarflade ω_2 med Hensyn til Fladebundtet. Da ω_2 skjærer r_4 i 8 Punkter, faas — i Overensstemmelse med de Plücker'ske Formler — 8 Tangenter. Den brugte Fremgangsmaade giver tillige forskjellige Rumkurver, som gaa

igjennem Røringspunkterne R med r_4, og hvis Projektioner altsaa ville være Kurver igjennem Røringspunkterne K mellem k_4 og Tangenter fra A.

Gjennem R gaar nu for det første Skjæringskurverne m_4 mellem ω_2 og Fladerne φ_2. Disses Projektioner n_4 blive Kurver af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter, som berøre A's Polarkeglesnit o_2, og tillige hver et af Keglesnittene f_2, i fire Punkter. En af dem faar samme Dobbeltpunkter som selve den givne Kurve.

Vi kunne endvidere gjennem P og Skjæringskurverne m_4 mellem ω_2 og Fladerne φ_2 lægge en ny Række Flader af anden Orden χ_2. Da disse gaa gjennem de 8 Punkter, hvori ω_2 skjærer Rumkurven r_4, og gjennem P, danne de et Bundt og gaa gjennem en ny Rumkurve af fjerde Orden s_4, som gaar gjennem P. Dens Projektion fra P bliver altsaa kun en Kurve af 3die Orden p_3, og denne maa ligeledes gaa gjennem de 8 Røringspunkter for Tangenter fra A til k_4. Tangentplanerne til Fladerne χ_2 i P danne selv et Bundt, og deres Spor danne et Bundt med Centrum Q paa p_3. De to Frembringere af en Flade χ_2, som ligge i en saadan Tangentplan, skjære hver s_4 i et Punkt foruden P, saa deres Spor ligge paa p_3. De ere tillige Dobbeltsekanter til en Kurve m_4, deres Spor altsaa Dobbeltpunkter paa en Kurve n_4. Da nu en af Kurverne n_4 har samme Dobbeltpunkter som den givne Kurve k_4, gaar p_3 ogsaa gjennem dennes Dobbeltpunkter D og D'. Gjennem disse 2 Punkter og de 8 Røringspunkter K kan der kun gaa én Kurve af 3die Orden. p_3 er saaledes den samme som i Læren om algebraiske Kurver kaldes A's første Polar. Vi have her bevist følgende:

Fra et Punkt A kan man drage 8 Tangenter til k_4. Gjennem disses Røringspunkter gaar 1) en Kurve p_3 af 3die Orden, som tillige gaar gjennem k_4's Dobbeltpunkter; 2) en Række Kurver af fjerde Orden n_4, som have to Dobbeltpunkter i p_3's to andre Skjæringspunkter med Linier gjennem det Punkt Q, hvori p_3 skjærer Linien d gjennem k_4's Dobbeltpunkter foruden i disse, og som berøre A's Polarkeglesnit o_2, og tillige hver et af det særegne Systems Keglesnit f_2, i 4 Punkter.

Indhyllingskurven for Kurverne n_4 er sammensat af de 8 Røringspunkter og A's Polarkeglesnit, medens p_3, som anført, er geometrisk Sted for deres Dobbeltpunkter.

Vi skulle ikke dvæle ved Undersøgelsen af de Grænseformer, som Kurven p_3 og Kurverne n_4 kunne antage for specielle Beliggenheder af A.

9. Keglesnit i det særegne System med sammenfaldende Røringspunkter. Et Problem, der føres tilbage til samme stereometriske Opgave som Bestemmelsen af Tangenterne fra et fast Punkt, er Bestemmelsen af de Keglesnit i det særegne System, paa hvilke 2 af de 4 Røringspunkter med k_4 falde sammen. Disse 4 Røringspunkter ere nemlig, ifølge 2, Projektioner af Skjæringspunkterne mellem Rumkurven r_4 og en Plan gjennem Projektionscentret P's Polaraxe. Et Punkt, hvori 2 af dem falde sammen, er saaledes Røringspunkt mellem en Plan i dette Bundt og Rumkurven r_4 og maa altsaa ligge paa Polarfladen til Bundtets Axe. Denne Polarflade er (smlgn. Nr. 5) den Kegleflade Pc_2, der til Spor har det Jacobi'ske Keglesnit c_2. Dette gaar altsaa gjennem de søgte Punkter af k_4:

Det Jacobi'ske Keglesnit skjærer k_4 i 8 Punkter, i hvilke Keglesnit i det særegne System have Røring af 3die Orden med denne Kurve.

Dette kunde man ogsaa uden at gjøre fornyet Brug af de stereometriske Betragtninger have udledet af Egenskaberne ved det Jacobiske Keglesnit (som ved almindelige Kurver af 4de Orden). Man finder ligeledes, at Tangenterne til Kurven k_4 i de her fundne Punkter tillige berøre den Hermite'ske Kurve. De og k_4's Dobbelttangenter udgjøre det hele System af de to Kurvers Fællestangenter.

10. Frembringelser af Kurven k_4. En vilkaarlig Plan π vil skjære to af Fladerne i Bundtet φ_2 og φ_2' i to Keglesnit,

hvis Projektioner t_2 og t_2' skjære hinanden i fire Punkter af Kurven C_4. Keglesnittene t_2 og t_2' have dobbelt Røring med Konturerne f_2 og f_2', og Røringskorderne, der ere Projektioner af Planen π's Skjæringslinier med de virkelige Konturers Planer, skjære Forbindelseslinien d mellem Dobbeltpunkterne i samme Punkt Q. Betragte vi nu en uendelig Række Planer π, kunne vi paa denne Maade faa alle Kurven k_4's Punkter med.

Vi kunne f. Ex. betragte alle Planer i et Bundt. Dettes Axe vil skjære Fladerne φ_2 og φ_2' i to Par faste Punkter, hvis Projektioner vi ville kalde EF og $E'F'$, og de virkelige Konturers Planer i to faste Punkter med Projektionerne B og B'. Gjennem disse sidste (blandt hvilke B bliver et af Dobbeltpunkterne i den ved EF og Skjæringspunkterne mellem denne Linie og f_2 bestemte Involution*), medens B' staar i den tilsvarende Forbindelse med f_2') ville de to Røringskorder for f_2 og t_2 og for f_2' og t_2' gaa, medens t_2 gaar gjennem E (og F), t_2' gjennem E' (og F'). Vi faa saaledes, at

k_4 e r d e t g e o m e t r i s k e S t e d f o r S k j æ r i n g s p u n k t e r n e m e l l e m t o K e g l e s n i t t_2 o g t_2', d e r g a a g j e n n e m h v e r s i t f a s t e P u n k t E o g E' o g b e r ø r e h v e r s i t K e g l e s n i t f_2 o g f_2' i d e t s æ r e g n e S y s t e m i d i s s e s S k j æ r i n g s - p u n k t e r m e d r e t t e L i n i e r, BQ o g $B'Q$, s o m f o r b i n d e t o f a s t e P u n k t e r B o g B' a f L i n i e n EE' m e d e t b e - v æ g e l i g t P u n k t Q a f F o r b i n d e l s e s l i n i e n m e l l e m D o b - b e l t p u n k t e r n e.

At omvendt den beskrevne Fremgangsmaade altid giver en Kurve af 4de Orden med 2 Dobbeltpunkter, følger af, at man frit kan underkaste en saadan de Betingelser, at to af de firdobbelt rørende Keglesnit i det særegne System og Dobbeltpunkternes Forbindelseslinie ere givne, samt endnu to Betingelser. Hvilken Kurven end var, kunde man nu frit vælge

*) En ret Linie skjærer to Keglesnit med dobbelt Røring i Punktpar i en Involution, hvis ene Dobbeltpunkt er Skjæringspunktet med Røringskorden.

Punkterne E og F (eller E og B). Opgivelsen af disse er altsaa ikke nogen Betingelse; men efterat de ere opgivne, bliver Opgivelsen af E' og B' to saadanne.

Vi kunne benytte os af det frie Valg af E og B til at faa en saadan simplere Konstruktion, som kan udføres ved Lineal og Passer. Vi kunne nemlig lade B ligge paa f_2 og E paa Tangenten i B til f_2. I saa Fald bliver Keglesnittet t_2 sammensat af Tangenten EB og en bevægelig Tangent t, hvis Skjæringspunkter med det tilsvarende Keglesnit t_2' — der kunne bestemmes som det fælles Punktpar i to Involutioner — blive Punkter af k_4. Den saaledes opstaaede Frembringelsesmaade kunde direkte udledes af de før anstillede Betragtninger i Rummet ved at lade Axen for Bundtet af Planer, hvormed φ_2 og φ_2' overskjæres, være en Frembringer i φ_2. Man finder, at

k_4 e r d e t g e o m e t r i s k e S t e d f o r S k j æ r i n g s p u n k t e r n e m e l l e m e n b e v æ g e l i g T a n g e n t t t i l e t K e g l e s n i t f_2 i d e t s æ r e g n e S y s t e m o g e t K e g l e s n i t t_2', d e r g a a r g j e n n e m e t f a s t P u n k t E' o g b e r ø r e r e t a n d e t a f S y s t e m e t s K e g l e s n i t f'_2 i S k j æ r i n g s p u n k t e r n e m e d L i n i e r n e i e t L i n i e b u n d t, h v i s f a s t e P u n k t B' e r b e l i g g e n d e p a a e n T a n g e n t $E'B$ f r a E' t i l f_2, o g s o m e r i p e r s p e k t i v i s k S t i l l i n g m e d d e t L i n i e b u n d t, h v o r v e d t's R ø r i n g s p u n k t e r m e d f_2 p r o j i c e r e s f r a T a n g e n t e n $E'B$'s R ø r i n g s p u n k t B m e d f_2; Skjæringspunkterne mellem de til hinanden svarende Linier i Liniebundterne falde paa Forbindelseslinien mellem k_4's Dobbeltpunkter.

Den stereometriske Udledelse viser, at ved denne sidste Konstruktion Kurven k_4 maa gaa saavel gjennem Punktet E', som det andet faste Punkt F', hvorigjennem Keglesnittet t_2', her som ved den foregaaende Konstruktion, af sig selv gaar. Hvis omvendt ved den første Konstruktion Punkterne E og F falde sammen med Punkterne E' og F', vil dette Punktpar ligge paa k_4, og Konstruktionen kan føres tilbage til den a n d e n; den bevægelige Fælleskorde til t_2 og t_2' vil saaledes frembringe et Keglesnit, der berører Linien EF[1]).

De angivne Konstruktioner kunne ikke umiddelbart gjennemføres, naar f. Ex. Kurven f_2 er Dobbeltlinien gjennem de to Dobbeltpunkter D og D' paa k_4; men de da nødvendige Modifikationer ere lette at finde. Keglesnittene t_2' danne i dette Tilfælde et Bundt gjennem E', F', D og D', og det Keglesnit t_2 (eller i den anden Konstruktion den Linie t), som skal svare til et Keglesnit t_2', kan bestemmes ved, at Bundtet af Tangenter til t_2' i E' er projektivt i perspektivisk Stilling med Bundtet (B) af Røringskorder til t_2 og f_2 (eller Korder fra B til t's Røringspunkt). Anvender man den anden Konstruktion, og er f_2 Dobbeltlinien DD', maa B være et af Dobbeltpunkterne, f. Ex. D, altsaa E', F' og B' Punkter af en Linie gjennem D. Linierne t, der skulle være Projektioner af Frembringere i Fladen φ_2 (som her er Fladen ψ_2 gjennem Projektionscentret), maa gaa gjennem Punktet D' og danne et Bundt, som er projektivt — men ikke i perspektivisk Stilling — med Bundtet (B') af Røringskorder mellem f_2' og t_2'; de Linier i disse Bundter, som gaa gjennem D, svare til hinanden.

Den anden Konstruktion bliver ligeledes ubestemt, naar Keglesnittet f_2 er et af de fire, som ere sammensatte af Dobbelttangenter. De Operationer, som da maa sættes i Stedet, ere for sammensatte til at have synderlig Interesse.

Anm. Den bekjendte Konstruktion ved to projektive Keglesnitsbundter, der have to Basispunkter (Kurvens Dobbeltpunkter) fælles, vil fremgaa ved to Anvendelser af den anden Konstruktion, idet man begge Gange lader f_2 være et og samme Keglesnit og lader f_2' være Dobbeltlinien DD', men derimod gjør to saadanne forskjellige Valg af Punkter B_1, E_1', F_1' og B_2, E_2', F_2',

---

[1]) Foruden denne Sætning om Keglesnit kan man finde andre ved at vælge det opgivne saaledes, at k_4 bliver sammensat af to Keglesnit. Dette vil f. Ex. indtræde, naar man lader f_2 og f_2' falde sammen, uden at Punktparrene EF og $E'F'$ gjøre det, idet φ_2 og φ_2' da ville have en fælles omskreven Kegle og altsaa skjære hinanden i to Keglesnit.

som kunne gaa kontinuert over hinanden, hvilket (se nedenfor) kan kjendes paa, at $E_1' F_1' E_2' F_2'$ ikke ligge paa Keglesnit med D og D'. Det viser sig herved, at ved denne Konstruktion Indhyllingskurven for den bevægelige Fælleskorde til Keglesnit i Bundterne, som svare til hinanden, er et Keglesnit f_2. Konstruktionen kunde ogsaa direkte udledes af de stereometriske Betragtninger.

Vi skulle endvidere fremhæve følgende Sætning, som fremgaar af den anden Hovedkonstruktion, eller umiddelbart af de stereometriske Betragtninger, som have ført dertil: De 8 Punkter, hvori Kurven k_4 skjæres af to Tangenter til et Keglesnit f_2 i det særegne System, dele sig i to Grupper Basispunkter for Bundter af Keglesnit, som alle have dobbelt Røring med Keglesnit i det særegne System.

11. Konstruktioner af Kurven k_4 ved Hjælp af et Hovedpunkt. Ved den anden af de to i 10 angivne Konstruktioner benyttedes en Række Planer i Rummet, som berørte en Flade φ_2 og altsaa skare den i rette Linier, men derimod skare en anden φ_2' i Keglesnit. Det kunde synes ønskeligt at benytte saadanne Planer, som berøre baade φ_2 og φ_2'; men Konstruktionen af Rækken af disse vil i Almindelighed være en Opgave af samme Vanskelighed som selve Konstruktionen af Rumkurven r_4 eller dens Projektion k_4. Kun naar en af Fladerne f. Ex. φ_2' er en af de fire Keglеflader i Fladebundtet, ville Tangentplanerne til den omskrevne Kegle til φ_2 med samme Toppunkt som φ_2' skjære begge disse Flader i rette Linier. Man kommer derved til efterfølgende Konstruktion af k_4, hvis Rigtighed vil være indlysende, naar det bemærkes, at det Punkt, som kaldes H, er Projektion af Toppunktet i Keglefladen φ_2', h_2 Projektionen af denne Keglеflades Skjæringskurve med Toppunktets Polarplan med Hensyn til φ_2 (og til alle Flader i Bundtet), og i_2 Projektionen af samme Polarplans Skjæringslinie med φ_2:

Der er forelagt 3 Keglesnit f_2, i_2 og h_2, af hvilke de to første have dobbelt Røring; Polen til Røringskorden kaldes H. Tangenten t til f_2 i det bevægelige Punkt T skjærer i_2 i to bevægelige Punkter, R og S, der danne Rækker, som begge ere projektive med

Punktrækken T og altsaa kunne adskilles[1]). Tangenten r til i_2 i R skjærer h_2 i to Punkter, som vi forbinde med H ved rette Linier. Det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem disse Forbindelseslinier og t er en Kurve af fjerde Orden k_4 med to Dobbeltpunkter, til hvis særegne System saavel f_2 som det af Tangenterne fra H til h_2 sammensatte Keglesnit hører. Den selvsamme Kurve vilde frembringes, hvis man i Stedet for Tangenterne i Punkterne R benyttede Tangenterne i Punkterne S. — Enhver Kurve k_4 kan — dog ikke altid ad reel Vej — frembringes paa denne Maade.

Den frembragte Kurve k_4 vil gaa igjennem de 4 Skjæringspunkter I_1, I_2, I_3, I_4 mellem h_2 og i_2 og i disse Punkter berøre deres Forbindelseslinier med H. Disse Punkter ville blive uforandrede, naar f_2 ombyttes med et nyt Keglesnit i det særegne System.

Konstruktionen simplificeres, naar φ_2 er Fladen ψ_2 gjennem Projektionscentret, f_2 altsaa Dobbeltlinien gjennem Dobbeltpunkterne. i_2, som vi i dette Tilfælde kalde j_2, bliver et Keglesnit gjennem Dobbeltpunkterne D og D', og Linierne t blive Linier gjennem et af disse; H bliver Linien DD''s Pol med Hensyn til j_2. I dette Tilfælde vil man af Konstruktionen kunne udlede, at de 4 Punkter, hvori en Linie gjennem H skjærer k_4, dele sig i saadanne to Par, at 1) Skjæringspunkterne med h_2 ere harmonisk forbundne med H med Hensyn hvert til sit Par, og at 2) Skjæringspunkterne med j_2 ere harmonisk forbundne med hinanden med Hensyn til begge Par. Disse to Sætninger, som vistnok give den simpleste Konstruktion af Kurven k_4 [2]), fremgaa dog lettere

---

[1]) Denne bekjendte Projektivitet kunde udledes af, at R og T kunne betragtes som Projektioner af Skjæringspunkter mellem to faste Planer og en bevægelig Frembringer i φ_2.

[2]) Se Dr. J. Petersens Afhandling om Opgavers Løsning ved Passer og Lineal i Tidsskrift for Mathematik 1874, S. 101.

umiddelbart af den stereometriske Betragtning. h_2 er nemlig Projektion af den benyttede Keglefiades Skjæringslinie med Toppunktets Polarplan med Hensyn til hele Fladebundtet, og denne Skjæringslinies Punkter ere altsaa harmonisk forbundne med Toppunktet med Hensyn til Keglefrembringernes Skjæringspunkter med Rumkurven. Dernæst er en Linie gjennem H Projektion af en plan Figur bestaaende af to Frembringere i Keglen og et Snit i Fladen ϕ_2 gaaende gjennem Projektionscentret P. Her danne P's Forbindelseslinier med Frembringernes Skjæringspunkter med Keglesnittet to Liniepar i en Involution, hvis Dobbeltlinier gaa gjennem Røringspunkterne for Tangenter fra Keglens Toppunkt til Keglesnittet. Men disse Røringspunkter ligge netop paa det Keglesnit, som projiceres i j_2.

12. Fællestangenter til Kurven k_4 og Keglesnit i det særegne System. Den første af de to Konstruktioner i Nr. 11 sætter os i Stand til at konstruere Fællestangenterne til et Keglesnit f_2 i det særegne System og Kurven k_4. En Tangent t til f_2 vil berøre Kurven, naar Tangenten til i_2 i Skjæringspunktet R med t tillige berører h_2 (ɔ: naar den Frembringer i φ_2, som projiceres i t, berører Kegleﬂaden φ'_2). Idet vi da nu foreløbig kun tage Hensyn til den Frembringelse af k_4, som faas ved at benytte den ene Række Skjæringspunkter R mellem t og i_2, faar man en Gruppe af 4 Fællestangenter til f_2 og k_4 i de Tangenter til f_2, hvis Punkter R falde i Berøringspunkterne R_1, R_2, R_3, R_4 mellem i_2 og dette Keglesnits Fællestangenter med h_2. Fra ethvert af disse Punkter af i_2 udgaar der jo imidlertid endnu en Tangent t til f_2, paa hvilken det imidlertid er at opfatte som det tilsvarende til Røringspunktet T i den anden Punktrække, som vi kaldte S. Benytte vi denne i Stedet for Punktrækken R ved Konstruktionen af k_4, se vi, at disse 4 andre Tangenter fra Punkterne R_1, R_2, R_3, R_4 danne en ny Gruppe af 4 Fællestangenter til f_2 og k_4. — En Undersøgelse af de øvrige Maader, hvorpaa Skjæringspunkter mellem

t og k_4 kunne falde sammen, vil vise (se næste Nr.), at de fundne to Grupper af Fællestangenter til f_2 og k_4 ere de eneste foruden Tangenterne i f_2's Røringspunkter. Dette følger ogsaa af, at Kurven er af 8de Klasse.

I Keglesnitslæren har man nu den Sætning, at de anharmoniske Forhold mellem de 4 Skjæringspunkter mellem to Keglesnit, regnede paa det ene af Keglesnittene, er lige stort med det anharmoniske Forhold mellem de 4 Fællestangenter, regnede paa det andet[1]). Vi se altsaa, at naar vi tage Punkterne R_1, R_2, R_3, R_4 og Skjæringspunkterne I_1, I_2, I_3, I_4 mellem h_2 og i_2 i passende Ordener, er

$$(I_1\,I_2\,I_3\,I_4) = (R_1\,R_2\,R_3\,R_4) = (T_1\,T_2\,T_3\,T_4),$$

hvor T_1, T_2, T_3, T_4 ere Røringspunkterne mellem f_2 og Tangenterne t i den ene af de to Grupper; den sidste Ligning følger nemlig af, at Punktrækkerne (R) og (T) ere projektive. Nu ligge, som angivet i Nr. 11, Punkterne I_1, I_2, I_3, I_4 fast paa Keglesnittet h_2, naar i_2 og f_2 variere. Vi have saaledes bevist:

Fællestangenterne til Kurven k_4 og et Keglesnit f_2 i det særegne System dele sig — bortset fra Tangenterne i Røringspunkterne — i to Grupper paa fire; alle saadanne Grupper af Røringspunkter med de forskjellige Keglesnit i det særegne System have, regnede paa disse Keglesnit, de samme anharmoniske Forhold.

Særligt have de to Grupper Røringspunkter paa samme Keglesnit f_2 samme anharmoniske Forhold. Man finder da, idet man kalder Røringspunkterne for de andre Tangenter fra Punkterne R til f_2 for U, og benytter sædvanlige Omdannelser af anharmoniske Forhold:

[1]) Ved anharmoniske Forhold mellem 4 Punkter af eller Tangenter til et Keglesnit forstaas det mellem Punkternes Forbindelseslinier med et fast Punkt af Keglesnittet, eller mellem Tangenternes Skjæringspunkter med en fast Tangent. 4 Tangenters anharmoniske Forhold er lige stort med deres Røringspunkters.

$$(T_1\, T_2\, T_3\, T_4) = (U_1\, U_2\, U_3\, U_4) = (U_2\, U_1\, U_4\, U_3)$$
$$= (U_3\, U_4\, U_1\, U_2) = (U_4\, U_3\, U_2\, U_1).$$

Idet nu Skjæringspunkterne mellem Tangenter til et Keglesnit i to Grupper paa 4 Punkter, der have samme anharmoniske Forhold, ligge paa et nyt Keglesnit, der har dobbelt Røring med det første, faas 4 saadanne Keglesnit. i_2 er det første af disse. De øvrige maa være dem, der staa i samme Forbindelse med de øvrige Hovedpunkter som i_2 med H.

Gaar Keglesnittet f_2 over til Dobbeltlinien d gjennem Dobbeltpunkterne, blive de to Grupper Fællestangenter til Tangenterne fra hvert af Dobbeltpunkterne. De anharmoniske Forhold mellem de 4 Tangenter fra et Dobbeltpunkt have saaledes ogsaa de til Kurven hørende konstante Værdier.

13. Konstruktion af Berøringspunkterne mellem Kurven k_4 og et Keglesnit i det særegne System. Ved de første Konstruktioner i Nr. 11 fandtes Skjæringspunkterne mellem en Tangent t til Keglesnittet f_2 og Kurven k_4 som to adskilte Punktpar: det ene findes ved at benytte t's ene Skjæringspunkt R med i_2, det andet kan — hvis man samtidig vil bruge begge de i første Sætning i 11 indeholdte Konstruktioner — findes ved Benyttelse af i's andet Skjæringspunkt S. I 12 have vi undersøgt Betingelsen for, at Punkter i samme Par faldt sammen; her skulle vi undersøge Betingelsen for, at Punkter i de forskjellige Par falde sammen. Dette vil i Almindelighed ikke indtræde, naar R og S falde sammen i et Røringspunkt mellem f_2 og i_2; t vil nemlig da gaa gjennem H og falde sammen med de 4 Linier fra H, som skulde bestemme Skjæringspunkterne, som da blot blive ubestemte og maa findes som Grænsestillinger. Det vil derimod indtræde, naar Tangenterne til i_2 i R og S uden at falde sammen enten skjære h_2 i samme Punkt, eller skjære h_2 i Punkter, som ligge ud i en ret Linie med Hovedpunktet H. I dette sidste Tilfælde staa t's sammenfaldende Skjæringspunkter slet ikke i nogen særlig Forbindelse

med hinanden og maa saaledes falde i et Dobbeltpunkt. Naar derimod Tangenterne i R og S skjære h_2 i samme Punkt Q, maa dette som Pol til Tangenten t til f_2 med Hensyn til i_2, ligge ud i en ret Linie med t's Røringspunkt T og Polen H til Røringskorden for i_2 og f_2. De to Skjæringspunkter mellem t og k_4 falde altsaa sammen i T, som saaledes bliver et Røringspunkt mellem f_2 og k_4. Altsaa:

Naar k_4, f_2, i_2, h_2 og H have de samme Betydninger som i Nr. 11, ere Tangenterne til k_4 i dens Røringspunkter med f_2, Fællestangenter til f_2 og den reciproke Polarkurve til h_2 med Hensyn til i_2. Røringspunkterne og disse Tangenters Poler med Hensyn til i_2 ligge paa rette Linier gjennem H. Lader man specielt f_2 være Dobbeltlinien gjennem Dobbeltpunkterne, ses det, at k_4's Tangenter i Dobbeltpunkterne berøre h_2's Polarkurve med Hensyn til j_2.

Hvis man nu efterhaanden fremstiller en Række Keglesnit i det særegne System — hvad man kan ved Benyttelse af, at de høre til et Keglesnitsnet (Nr. 3), og at et fast Punkts Polarer med Hensyn til dem alle berøre et Keglesnit (Nr. 5) — kan man benytte de her givne Bestemmelser til at finde Røringspunkterne og Tangenterne i samme, altsaa Kurven k_4's Punkter og Tangenter. Det er dog naturligvis ikke Meningen, at vi tænke os denne Frembringelsesmaade af Rækken af Keglesnit, Punkter og Tangenter benyttet til virkelig Konstruktion af Punkter og Tangenter.

14. Ny Konstruktion af Keglesnittene i det særegne System; Tangentfrembringelse. Vi have set i Nr. 11, at Keglesnittene f_2 i det særegne System have dobbelt Røring med Keglesnittene i_2 i det Bundt, som gik gjennem Røringspunkterne I for de 4 enkelte Tangenter fra et Hovedpunkt H, og at H er Pol til Røringskorderne. Ved Benyttelse af to Hovedpunkter H og H' og de tilhørende Bundter i_2 og i_2' faar man en ny Konstruktion af Keglesnittene f_2.

Naar det erindres, at Keglesnittene i_2 ere Projektioner af Skjæringslinierne mellem Fladerne i Bundtet φ_2 og Polarplanen til den Keglespids, som projiceres i H, og at denne Polarplan gaar gjennem de 3 øvrige Keglespidser, vil man se, at de to Bundter i_2 og i_2' ere saaledes forbundne, at de have to Vinkelspidser i de selvkonjugerede Trekanter fælles, nemlig Hovedpunkterne H'' og H''', at H' er den 3die Vinkelspids for Bundtet i_2, H for Bundtet i_2', og at desuden de til hinanden svarende Keglesnit i_2 og i_2', som skulle berøre samme Keglesnit f_2, maa skjære Linien H'' og H''' i de samme Punkter. At Bundterne ikke ere underkastede andre Betingelser, følger af, at Rumkurven r_4, og derved Bundtet af Flader φ_2, kan tænkes bestemt ved to vilkaarligt opgivne Keglefladerl[1]). Vi se saaledes:

Naar to Keglesnitsbundter i_2 og i_2' have de selvkonjugerede Trekanter $H'H''H'''$ og $HH''H'''$ med to fælles Vinkelspidser H'' og H''', og man konstruerer et Keglesnit f_2, som berører dels et Keglesnit i_2 i dets Røringspunkter med Tangenter fra H, dels det Keglesnit i_2', der skjærer Linien $H''H'''$ i de samme Punkter som i_2, i dets Røringspunkter med Tangenterne fra H', vil Rækken af saaledes konstruerede Keglesnit danne det særegne System firdobbelt rørende Keglesnit til en Kurve k_4 med Punkterne $HH'H''H'''$ til Hovedpunkter. Naar man bortser fra Realitetshensyn, vil det særegne System til enhver Kurve k_4 kunne konstrueres paa denne Maade.

Den samme Figur kan ogsaa anvendes til uden at konstruere Keglesnittene f_2 at konstruere Kurven k_4's Tangenter. En saa-

[1]) Man finder ogsaa herved den til Keglesnitslæren hørende Sætning, at naar to Keglesnitsbundter ere bestemte paa denne Maade, ville de anharmoniske Forhold mellem det enes Basispunkter I, regnede paa det Keglesnit h_2, som i Bundtet i_2 svarer til Linieparret gjennem H i i_2' være lige store med dem mellem det andets Basispunkter I', regnede paa det Keglesnit h_2', som i i_2' svarer til Linieparret gjennem H' i i_2.

dan vil nemlig altid tillige i et andet Punkt berøre et Keglesnit f_2, og maa altsaa ifølge Nr. 12 forbinde et Røringspunkt R mellem en Fællestangent til et Keglesnit i_2 og det Keglesnit h_2 i Bundtet i_2, som skjærer Linien $H''H'''$ i de samme Punkter som det Keglesnit i Bundtet i_2', der er sammensat af rette Linier gjennem H, med et Punkt R', der er bestemt paa samme Maade som R paa det til i_2 svarende Keglesnit i_2'. Man kan imidlertid ikke forbinde de 4 Punkter R med de 4 Punkter R' paa en hvilken som helst Maade. Idet Forbindelseslinierne RR' skulle være Projektioner af Frembringere i en Flade φ_2, maa R og R' høre til projektive Punktrækker paa i_2 og i_2', som bestemmes ved, at der i hvert af Keglesnittenes fælles Skjæringspunkter med Linien $H''H'''$ falder et Par tilsvarende Punkter sammen, og ved at f. Ex. et Røringspunkt mellem i_2 og en Tangent fra H (hvilket tillige er Røringspunktet med f_2) skal svare til det ene eller det andet af denne Tangents Skjæringspunkter med i_2'. Et vilkaarligt af Punkterne R vil saaledes blive forbundet med to bestemte af Punkterne R' ved Tangenter til k_4.

15. Analytisk Fremstilling. Antalgeometriske Betragtninger, som hidtil ikke have spillet nogen Rolle i vore Beviser, give det simpleste Middel til at fremstille Kurven k_4 analytisk paa en Maade, der knytter sig til de Egenskaber ved det særegne System, som vi hidtil have betragtet. Herved har det været en Hovedsag, at en Tangent t til et Keglesnit f_2 er Projektion af to Frembringere i en Flade φ_2, og at altsaa dens Skjæringspunkter med k_4 dele sig i to Par. Ved nu som ved den anden Konstruktion i Nr. 10 kun at holde sig til den ene Frembringelse af φ_2, kan man faa alle Kurven k_4's Punkter med ved paa hver Tangent t kun at bestemme det ene Par Skjæringspunkter.

Et Punkt af k_4 fremstilledes da som Projektion af et Skjæringspunkt mellem en Frembringer i den ene Række i φ_2 og en anden Flade φ_2'. Gjennem dette Skjæringspunkt gaar der nu ogsaa en Frembringer i hver Række i φ_2'. Holde vi os ogsaa her til den ene af Rækkerne, faa vi et vilkaarligt Punkt af k_4 bestemt som et Skjæringspunkt mellem en Tangent t til f_2 og en Tangent t' til f_2'. Da kun to af t's Skjæringspunkter ere Projektioner af Skjæringspunkter mellem en Frembringer i den Række, hvortil vi holde os, og Rumkurven r_4, vil der til hver Tangent t til f_2 svare to Tangenter t' til f_2'; omvendt svarer der til hver Tangent t' to Tangenter t.

Forbindelsen er dog ikke den almindeligste af den her angivne Beskaffenhed. En Fællestangent til f_2 og f_2' er nemlig Projektion af en Frembringer af hver Frembringelse saa vel i φ_2 som i φ_2', og disse fire Frembringere skjære alle hinanden. I en saadan Fællestangent falder saaledes en Tangent t sammen med en af de to tilsvarende Tangenter t'. At Forbindelsen mellem t og t' ikke er underkastet andre Indskrænkninger, følger af, at den almindeligste Kurve af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter skal kunne underkastes 12 indbyrdes uafhængige Betingelser. To opgivne firdobbelt rørende Keglesnit give 8 saadanne, og i den almindeligste Form for en Ligning, som er af anden Grad i hver af to variable Størrelser x og x', nemlig

$$(ax^2 + 2bx + c)x'^2 + 2(a'x^2 + 2b'x + c')x' + a''x^2 + 2b''x + c'' = 0 \qquad (1)$$

indgaa 8 Konstanter. Vare da disse forud underkastede mere end fire Betingelser, kunde ikke enhver Kurve af fjerde Orden med to Dobbeltpunkter frembringes paa den angivne Maade, hvad vi jo netop have vist, at den kan.

Det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem saadanne Tangenter t og t' til to faste Keglesnit f_2 og f_2', hvis bestemmende Parametre x og x' ere underkastede en Ligning (1), der er af anden Grad saavel i x som i x', og som tilfredsstilles, naar der for x og x' indsættes Parametrene til de 4 Fællestangenter til f_2 og f_2', er en Kurve af fjerde Orden k_4 med to Dobbeltpunkter. Omvendt kan enhver saadan Kurve fremstilles paa denne Maade, idet f_2 og f_2' ere to hvilke som helst firdobbelt rørende Keglesnit i det særegne System.

Parametrene x og x' — om hvilke det maa forudsættes, at de entydigt bestemme og bestemmes ved Tangenterne — kunne være de anharmoniske Forhold, som dannes af de bevægelige Tangenter og 3 faste Tangenter til samme Keglesnit, eller af disse Tangenters Røringspunkter.

De 4 Relationer, som Koefficienterne maa tilfredsstille, faas ved samtidig Indsættelse af Parametrene x og x' til Fællestangenterne. De 4 Konstanter, som endnu behøves til den enkelte Kurves fuldstændige Bestemmelse, kunne faas ved opgivne Punkter. Da man fra et saadant kan drage 2 Tangenter til hvert af Keglesnittene, og disse Tangenter kunne forbindes paa 4 Maader, og da endvidere enhver bestemt Kurve k_4 kan frembringes ved 4 forskjellige Forbindelser af Tangentrækkerne til to Keglesnit f_2, ses det, at den Opgave at bestemme Kurven ved to Keglesnit i det særegne System og 4 opgivne Punkter har $4^4 : 4 = 64$ Opløsninger.

Sætningen i Nr. 12 om de anharmoniske Forhold mellem Fællestangenter til k_4 og f_2 viser sig ved Ligning (1) som et specielt Tilfælde af den Sætning, at denne Lignings to Diskriminanter have de samme Invarianter[1]).

Ved særlige Valg af f_2 og f_2' faar man speciellere Frembringelsesmaader af k_4. Blandt disse skulle vi mærke følgende:

1) f_2 og f_2' falde sammen[2]). k_4's Punkter bestemmes da som Skjæringspunkter mellem Tangenter til samme Keglesnit. Relationen mellem x og x' er i dette Tilfælde ikke underkastet nogen Indskrænkning; men de indbyrdes lige store Værdier af x og x' ville — naar man bruger samme Parameterbestemmelse

---

1) Om denne Sætnings forskjellige geometriske Anvendelser haaber jeg at gjøre Meddelelse i Proceedings of the London Mathematical Society.

2) x og x' ere i dette Tilfælde tillige de Koordinater, som Chasles benytter til Bestemmelse af Kurven r_4 paa φ_2. (Comptes rendus, 2 décembre 1861.)

for de bevægelige Tangenter — være Tangenter i Røringspunkterne mellem f_2 og k_4. Man ser, at der vil bestemmes $2^7 = 128$ Kurver k_4 ved et Keglesnit i det særegne System og 8 givne Punkter.

2) f_2' kan være Dobbeltlinien mellem de to Dobbeltpunkter D og D'. Linierne t' ville i dette Tilfælde danne et Bundt gjennem D eller D'. 4 opgivne Punkter give i dette Tilfælde $2^3 = 8$ Opløsninger. Falder f_2' sammen med det samme Keglesnit, danne t og t' Liniebundter gjennem D og D'. Ved i Ligning (1) at sætte $x = \frac{x_1}{x_3}$, $x' = \frac{x_2}{x_3}$ faar man Ligningen for Kurven henført til en Koordinattrekant med to Vinkelspidser i Dobbeltpunkterne. 8 opgivne Punkter give i dette Tilfælde kun én Opløsning..

3) Er f_2 sammensat af Dobbelttangenterne gjennem et Hovedpunkt H, ville Linierne t alle gaa gjennem dette. Parameteren x — der i dette Tilfælde nærmest bestemmer Frembringere i Keglefladen φ_2 — er imidlertid da ikke en saadan, som paa simplest Maade bestemmer t som Linie i Bundtet H. En saadan y vil give to Værdier af x, medens et opgivet x giver én Værdi af y. Man faar da en Ligning af Formen:

$$(\alpha y + \beta)x^2 + 2(\gamma y + \delta)x + \varepsilon y + \zeta = 0. \tag{2}$$

Elimination af x mellem (1) og (2) giver en Ligning af Formen

$$[(dx'^2 + 2ex' + f)y + (gx'^2 + 2hx' + i)]^2$$
$$= (bx'^2 + 2b'x' + b'')^2\,(ky^2 + 2ly + m). \tag{3}$$

Denne Form — som maaske lettest findes ved, at man først ved passende Valg af Nul-, Uendeligheds- og Enhedselementer giver (2) Formen $x^2 = y$, og senere efter Indsættelse af $x = \sqrt{y}$ i (1) vender tilbage fra de specielt valgte Nul- og Uendelighedselementer for y ved at ombytte y med $\frac{\lambda y + \mu}{\nu y + \rho}$ — viser umiddelbart den af Dannelsesmaaden fremgaaende Opløselighed ved Kvadratrod[1]).

[1]) Smlgn. Dr. Petersens allerede citerede Afhandling i Tidsskrift for Mathematik, 1874.

Ligning (3) er underkastet den Betingelse, at Indsættelse af Parametrene y til enhver af Tangenterne fra H til f_2' skal bringe en Rod i enhver af de to Ligninger, hvori (3) deler sig ved Kvadratrodsuddragning, til at være Parameter x' til samme Tangent. Tage vi nu Parametrene til de to Tangenter fra H til f_2' til Nul- og Uendelighedselementer baade for Linier i Bundtet H og for Tangenter til f_2', udtrykkes denne Betingelse ved

$$d = b = i = b'' = 0.$$

Med ændrede Betydninger af Bogstaverne bliver Ligningen da til

$$[(ax' + b)y + (cx' + d)x']^2 = x'^2(ey^2 + 2fy + g). \qquad (4)$$

Er nu f_2 specielt Dobbeltlinien gjennem Dobbeltpunkterne D og D', kan x' antages at bestemme en Linie i Bundtet D, saaledes at $x' = 0$ giver DD' (og, naar dette Tilfælde betragtes som Grænsetilfælde, tillige alle Linier gjennem D'), medens $x' = \infty$ giver DH. Da giver efter de gjorte Forudsætninger $y = 0$ Linien HD' og $y = \infty$ Linien HD. $x' = \frac{x_3}{x_1}$ $y = \frac{x_2}{x_1}$ ere saaledes Trekantskoordinater for Koordinattrekanten $D'DH$. Indsættelse gjør Ligning (4) til

$$[bx_1x_2 + dx_1x_3 + ax_2x_3 + cx_3^2]^2$$
$$= x_3^2(gx_1^2 + 2fx_1x_2 + ex_2^2). \qquad (5)$$

Denne Ligning fremgaar forøvrigt af almindelige Fremstillinger af Kurver af fjerde Orden derved, at $x_3^2 = 0$ og Dobbelttangentparret $gx_1^2 + 2fx_1x_2 + ex_2^2 = 0$ ere firdobbelt rørende Keglesnit i samme System.

4) Er foruden f_2 ogsaa f_2' sammensat af Dobbelttangenterne gjennem et andet Hovedpunkt H', og bestemmer y' en ret Linie i Bundtet H', maa man have en Ligning af Formen

$$(\alpha'y' + \beta')x'^2 + 2(\gamma'y' + \delta')x' + \varepsilon'y' + \zeta' = 0. \qquad (6).$$

Elimination af x' mellem denne Ligning og (3) giver en Ligning, som er af fjerde Grad i y og af samme Grad i y', og som er opløselig ved Kvadratrod for begges Vedkommende. De fire Linier i det ene Bundt, som svare til HH' i det andet, falde sammen med denne Linie. Tages den i begge Bundter til

Uendelighedslinie, vil der paa Grund af Ligningens specielle Form kun blive Led tilbage, hvis samlede Grad i y og y' ikke overstiger 4. Ved at sætte $y = \frac{x_2}{x_1}$, $y' = \frac{x_3}{x_1}$ faar man Kurven henført til en Koordinattrekant med to Vinkelspidser i Hovedpunkter. Herpaa skulle vi dog ikke gaa nøjere ind.

I de to sidst betragtede Tilfælde, hvor f_2 eller baade f_2 og f_2' ere sammensatte af to Dobbelttangenter, bliver Antallet af Kurver, der gaa gjennem 4 givne Punkter, de samme, som naar de givne Keglesnit ere usammensatte; man har nemlig ogsaa i disse Tilfælde Ligning (1), naar man deri tænker x og x' bestemte ved (2) og (6).

Anm. Naar i Ligning (1) x og x' betegnede Parametrene til Tangenter til to forskjellige Keglesnit f_2 og f_2', krævedes der, at den skulde tilfredsstilles ved samtidig Indsættelse af Parametrene til enhver af de fire Fællestangenter. Det ligger nær at spørge, hvilken Kurve k der fremstilles ved Ligningen (1) — eller den deri udtrykte Frembringelsesmaade — naar Indskrænkningen borttages. Svaret erholdes let ved en Tælling. Kurven vil berøre ethvert af de givne Keglesnit f_2 i de Punkter, hvor et Røringspunkt for en Tangent t til samme falder sammen med et Skjæringspunkt med en tilsvarende Tangent t' til det andet Keglesnit f_2'. Antallet af disse Punkter, som ere de eneste Punkter, k har fælles med f_2, findes ved Korrespondanceprincipet at være $4 + 4 = 8$. Kurven har altsaa $8 . 2$ Punkter fælles med et Keglesnit og maa følgelig være af 8de Orden. (Det samme ses ogsaa ved kontinuert Overgang fra det allerede betragtede specielle Tilfælde, hvor de til sig selv svarende Fællestangenter da maatte betragtes som 4 Grene af den fuldstændige frembragte Kurve.) Da Punkterne af den nu frembragte almindelige Kurve k kunne svare et for et til Punkterne af en Kurve k_4, maa den ligesom denne være af Slægten 1[1]. Den har altsaa 20 Dobbeltpunkter. Idet den tillige er underkastet de to 8-dobbelte Betingelser at skulle berøre to givne Keglesnit i 8 Punkter, og Ligning (1) endnu indeholder 8 Konstanter, og da en almindelig Kurve af 8de Orden bestemmes ved 44 Betingelser, ses det, at der, for at en Kurve af 8de Orden skal kunne frembringes paa den angivne Maade, ikke kræves flere opgivne Betingelser end 1) de 20 at have 20 Dobbeltpunkter og 2) de to 3-dobbelte at have to 8-dobbelt rørende Keglesnit[2]. Hermed er dog ikke godtgjort, at enhver

[1]) Dette ses ogsaa af min Udvidelse af Slægtsformlen til flertydig Samsvaren (Mathematische Annalen, 3. Bd., S. 152).

[2]) Hvis — hvad der jo er tænkeligt, men meget lidet rimeligt — nogle af disse Betingelser medføre de øvrige, have vi i ethvert Tilfælde godtgjort, at det samlede Antal Betingelser, som maa tilfredsstilles af alle Kurver

Kurve, der tilfredsstiller de 26 Betingelser, kan frembringes paa den angivne Maade. Det var jo nemlig muligt, at Systemet af 26 Betingelsesligninger, som Koefficienterne skulle tilfredsstille, var reduktibelt, saaledes at Betingelserne tilfredsstilles af flere Kurvearter med samme Grad af Almindelighed. Der vil ogsaa virkelig kunne indtræde Tilfælde, hvor Frembringelsen er uanvendelig, naar Kurven f. Ex. er sammensat af to Kurver af fjerde Orden hver med to Dobbeltpunkter.

16. Bicirkulære Kurver af 4de Orden. De i det foregaaende udviklede Sætninger anvendes let paa det Tilfælde, hvor Dobbeltpunkterne D og D' ere Planens uendelig fjerne Cirkelpunkter. Keglesnit gjennem Dobbeltpunkterne blive da Cirkler, Keglesnit, der skjære hinanden i to Punkter af Linien DD', blive ligedannede og ligedan beliggende; de blive tillige koncentriske og faa altsaa samme Asymptoter, hvis de skulle berøre hinanden i disse Punkter; de blive ligesidede Hyperbler, hvis Punkterne ere harmonisk forbundne med Hensyn til Dobbeltpunkterne o. s. v. Ved Anvendelse heraf giver man adskillige af de i det foregaaende udviklede almindeligere Resultater følgende simplere Former i det Tilfælde, hvor k_4 er en bicirkulær Kurve af 4de Orden:

Berøringspunkterne for Keglesnit i det særegne System bestemmes som Kurvens Skjæringspunkter med en Række koncentriske Cirkler (Nr. 2); det fælles Centrum kalde vi O.

Ethvert Keglesnit i det lineære Net, hvortil det særegne System hører, har samme Asymptoter som et Keglesnit i det særegne System; det geometriske Sted for Centrene er en ligesidet Hyperbel (det Jacobi'ske Keglesnit, Nr. 6); Indhyllingskurven for Asymptoterne — der ere Linier trukne gjennem det Jacobi'ske Keglesnits Punkter C vinkelret paa deres

med den angivne Frembringelsesmaade, er 26, idet 18 — to Keglesnit og 8 Punkter — endnu kunne vælges. Vi tælle Betingelser efter Antal af Betingelsesligninger.

Forbindelseslinier OC med det faste Punkt O af samme Keglesnit — er en Kurve af tredie Klasse, der berører den uendelig fjerne rette Linie i Skjæringspunkterne med det Jacobi'ske Keglesnit, og som har O til Brændpunkt (den Hermite'ske Indhyllingskurve, Nr. 7); de Korder, som Keglesnit i det lineære Net afskjære, og to af de Korder, som Kurven k_4 afskjærer paa en vilkaarlig Tangent til Indhyllingskurven, have samme Midtpunkt C.

De 8 Punkter, hvori to Tangenter til samme Keglesnit i det særegne System skjære Kurven, ere beliggende paa to Cirkler (Nr. 10 Anm.).

Ogsaa Konstruktionerne i Nr. 10 ville her antage simplere Former, naar man lader f_2 være den uendelig fjerne Dobbeltlinie, idet Kurverne t_2' da blive Cirkler. — I Nr. 11 bliver det Keglesnit, vi have kaldt j_2, en Cirkel om H. Brændpunkterne fordele sig paa de til de 4 Hovedpunkter svarende Cirkler j_2, som saaledes ere de i den sædvanlige Theori for de bicirkulære Fjerdegradskurver benyttede Cirkler om Hovedpunkterne, som Kurvens dobbelt rørende Cirkler skulle skjære orthogonalt. De geometriske Steder for Centrene i de dobbelt rørende Cirkler ere de reciproke Polarkurver til Keglesnittene h_2 med Hensyn til de til samme Hovedpunkter hørende Cirkler j_2. Den bekjendte Bestemmelse af de fælles Brændpunkter for disse geometriske Steder vil fremgaa af Nr. 13.